

# О точной оценке неточностей аппроксимации прямых в алгоритме быстрого преобразования Хафа

Е.И. Ершов<sup>1,2</sup>, А.П. Терехин<sup>1</sup>, С.М. Карпенко<sup>1</sup>, Д.П. Николаев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт Проблем Передачи Информации, РАН

<sup>2</sup> Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет)

**Аннотация** В данной работе проведен анализ точности быстрого преобразования Хафа. В этом алгоритме используются аппроксимация прямых дискретными паттернами специального вида, называемыми диадическими прямыми. Предложен явный способ вычисления координат точек данной прямой, а также проведены теоретические и эмпирические оценки ошибки отклонения диадической от идеальной геометрической прямой.

**Ключевые слова:** Быстрое преобразование Хафа, дискретная аппроксимация прямых, диадические прямые, ошибки аппроксимации, обработка изображений, числа Якобшталя

## 1 Введение

Преобразование Хафа (ПХ) было изобретено Полом Хафом для анализа фотографий, полученных в пузырьковой камере, в 1959 году. Запатентовано же оно было автором в 1962 году [1]. Важнейшим частным случаем ПХ является преобразование Хафа для прямых; ниже рассматривается только этот случай. Детали реализации преобразования в патенте были изложены довольно невнятно, возможно, намеренно. В том числе поэтому впоследствии алгоритм ПХ «дорабатывался» Р.О. Дудой и П.Е. Хартом. Основной претензией исследователей к исходной имплементации Хафа (с использованием «школьного» уравнения прямой) была потенциальная неограниченность массива аккумуляторов, вычисляющих результат преобразования. Следует заметить, что в исходном патенте были достаточно ясные указания о том, как преодолеть эту проблему, но вариант Дуды и Харта (с т.н. нормальным уравнением прямой), безусловно, выглядел более элегантно. Более подробно об этом направлении развития вопроса можно прочитать в [2]. И только гораздо позже стало ясным, что в исходной параметризации алгоритм Хафа имеет быстрый способ вычисления, а в элегантно-нормальной параметризации - напрямую нет.

Преобразование Хафа - это популярный способ анализа в обработке изображений и компьютерном зрении. Можно указать множество применений

ПХ, например, детектирование прямолинейных краев, определение ориентации документа, определение точек схождения [3] и др. Помимо прочего, преобразование Хафа успешно применяется в робастном регрессионном анализе [4, 5, 6].

Математически преобразование Хафа - это дискретная форма преобразования Радона  $\mathcal{R}$  (ИР):

$$\mathcal{R}f(L) = \int_L f(x)|dx|, \quad (1)$$

где  $f$  - скалярная функция,  $\Omega$  - область определения  $f$  (к примеру, пространство координат изображения),  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $L$  - прямая  $L \subset \Omega$ . Согласно уравнению (1). Преобразование Радона для дискретного множества  $\Omega$  - это преобразование Хафа. Стоит отметить, что в контексте практических задач прямая представляет собой линейный, кусочно-непрерывный отрезок, но, в угоду лаконичности, далее употребляется термин "прямая" или "паттерн".

Оценим вычислительную сложность преобразования Хафа для скалярного («серого») квадратного изображения  $\mathcal{I}$ , которое может интерпретироваться как двумерный массив размера  $n \cdot n$ . В таком случае, число всевозможных дискретных прямых пропорционально  $n^2$ , причем длина прямой пропорциональна  $n$ , откуда следует, что вычислительная сложность в целом составляет  $O(n^3)$ . Тем не менее, существует быстрая схема вычисления ПХ, так называемое быстрое преобразование Хафа (БПХ). БПХ было изобретено в 1998 году М.Л. Брейди [7], но широкой известности не получило, а потому позже неоднократно переизобреталось [8, 9]. Вычислительная сложность БПХ -  $O(n^2 \log n)$  для квадратного изображения с линейным размером  $n$ . Более того, вычисление БПХ не вовлекает комплексную арифметику и может быть проведено целочисленно. Однако на практике было замечено, что диадические паттерны, используемые в алгоритме БПХ, аппроксимируют идеальные прямые с некоторой неточностью, которая растет линейно с логарифмом от размера изображения.

В данной работе рассматривается ошибка аппроксимация геометрически идеальной прямой диадическими паттернами. Ввиду возрастающего интереса к БПХ проблема точности становится все более существенной, что и является мотивацией для исследования данного вопроса. В данной работе будет предложена новая аналитическая форма представления диадических паттернов, получены теоретические и эмпирические оценки ошибки аппроксимации идеальных прямых диадическими, а также показана взаимосвязь между структурой ошибки аппроксимации и последовательностью Якобшталя.

Статья состоит из трех глав. В первой главе приводится описание структуры диадических прямых и классический способ их построения. Во второй главе изложены результаты эмпирических исследований, приведена визуализация ошибки аппроксимации диадическими прямыми. В третьей главе предложены теоретические оценки ошибки аппроксимации в зависимости от

размера изображения, а также показана связь структуры ошибки с числами Якобшталя.

## 2 Происхождение диадических прямых

Преобразование Хафа приводит к хорошим результатам при решении широкого ряда практических задач. Тем не менее его привлекательность ограничивалась высокой алгоритмической сложностью  $O(n^3)$ , оценка которой приведена выше. Данное обстоятельство привело к появлению быстрого преобразования Хафа с оценкой сложности  $O(n^2 \ln n)$ . Подобное ускорение стало возможным за счет нескольких нововведений: новой параметризации прямых на изображении, использовании новой рекурсивной структуры диадических прямых а также рекурсивной схемы суммирования.

Согласно [3] существует способ корректного заполнения пространства Хафа, оси которого являются параметрами прямой в исходном изображении. Прямые разделяются на преимущественно-горизонтальные с наклоном вправо ( $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ), преимущественно-горизонтальные с наклоном влево ( $\alpha \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ ), преимущественно-вертикальные с наклоном вправо ( $\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ) и преимущественно-вертикальные с наклоном влево ( $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}]$ ), причем  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (Рис. 1). Таким образом, возможно параметризовать наклон прямой на изображении.

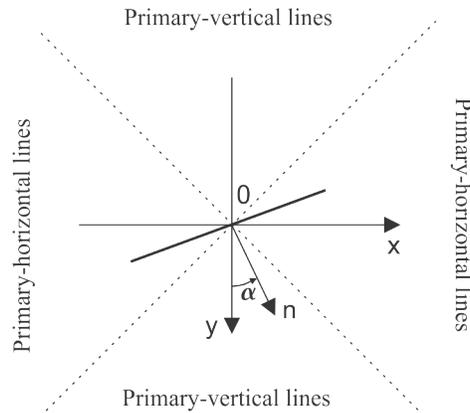


Рис. 1: Типизация прямых

Далее будут рассматриваться только преимущественно-вертикальные прямые с наклоном вправо, что не ограничивает общность изложения для остальных типов прямых. Такие прямые можно задать положением двух точек пересечения с границами изображения (краевые эффекты легко преодолить, например, склеиванием левого и правого краев изображения). В данном

случае - это верхняя и нижняя сторона изображения, тогда прямую можно задать абсциссой точки пересечения с нижней стороной  $x$  и смещением абсциссы точки пересечения прямой с верхней стороной  $shift$ , см. рисунок 2.

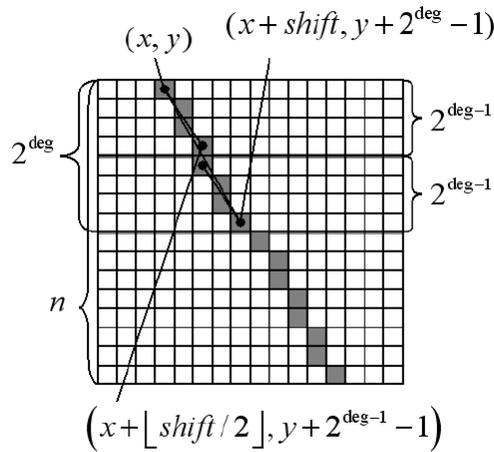


Рис. 2: Диадический паттерн. Иллюстрация схемы вычисления положения пикселя, принадлежащего диадической прямой.  $deg$  - шаг рекурсии.

Из рисунка 2 видно, что структура диадической прямой, а именно расположение сдвигов не зависит от  $x$  и может быть записана следующим образом:  $\lfloor shift/2 \rfloor, shift \pmod{2}, \lfloor shift/2 \rfloor$ , где первый и третий члены отвечают за величину сдвига приходящегося на паттерн следующей итерации, второй - за сдвиг между паттернами.

Подобная форма записи построения диадических прямых достаточна для программной реализации и успешно используется в решении прикладных задач. С увеличением интереса к БПХ было замечено, что на изображениях большого размера ( $2048 \times 2048$ ) неточность аппроксимации достигает двух пикселей, что не является инженерной проблемой в силу незначительности относительной погрешности, но служит поводом для математического исследования данного вопроса.

### 3 Эмпирическое исследование

С целью исследования поведения ошибки аппроксимации был проведен ряд эмпирических исследований. В первую очередь проводились исследования максимальной ошибки отклонения диадической прямой от идеальной. Результаты для различных размеров изображения  $n$  приведены на рисунке

3. Результаты вычислений дают основания предполагать линейную зависимость между логарифмом размера изображения и максимальной ошибкой отклонения. Способ вычисления ошибки - модуль разности абсцисс пикселей, лежащий на одной линии.

Не менее интересным фактом является то, что разница ошибок для соседних четных степеней - всегда фиксированное число, равное одной третьей, иначе говоря, ошибки лежат на прямой  $e = \frac{p}{6}$ . При этом из рисунка 3 видно, что ошибка в общем случае не подчиняется линейному закону. Более того, не является линейной и ее подвыборка в нечетных степенях. Рассматривая отклонения от линейной асимптоты, для нечетных степеней удалось получить формулу  $e = \frac{p}{6} - \frac{2^p+1}{18(2^p-1)}$ , с машинной точностью описывающую ошибку. В любом случае, есть основания полагать, что ошибка мажорируется прямой с коэффициентом наклона  $k = \frac{1}{6}$ .

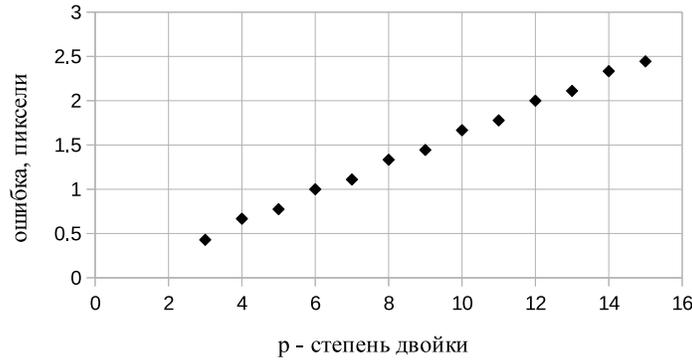


Рис. 3: Зависимость максимальной ошибки отклонения аппроксимации диадической прямой от размера изображения ( $2^p$ ).

Помимо этого, в ходе исследования было обнаружено, что для четных степеней двойки размера картинки наблюдается интересная закономерность: худший результат аппроксимации достигается всегда на прямых с наклонами:  $\frac{2^p}{3}, \frac{2^{p+1}}{3}$ , более того, в силу симметрии, на каждой из этих прямых худшее значение достигается дважды, в точках:  $\frac{2^p}{3}, \frac{2^{p+1}}{3}$ , где  $n$  - линейный размер изображения, а  $p = \log_2 n$ .

На рисунке 4 цветом показана величина абсолютной ошибки аппроксимации для всех наклонов преимущественно-вертикальных прямых с наклоном вправо, исходящих из одной точки для квадратных изображений с линейными размерами: 4, 16, 64, 256 соответственно. На горизонтальной оси отложен сдвиг вдоль прямой в пикселях, на вертикальной - *shift*, цветом закодирована величина ошибки: чем светлее пиксель, тем больше абсолютная величина ошибки. Стоит отметить получившуюся симметрию изображения

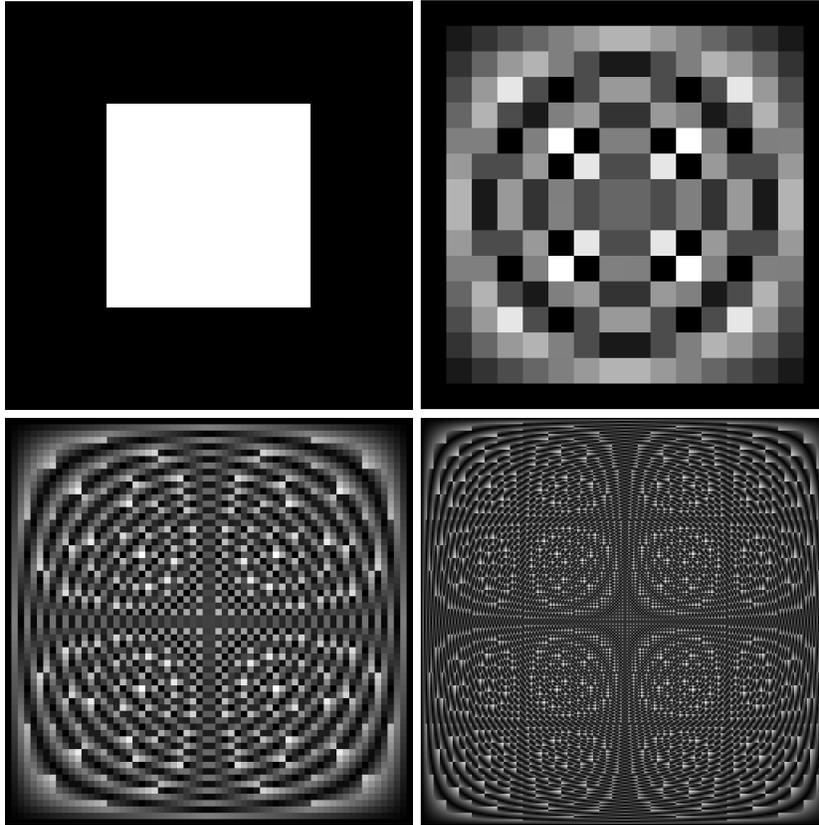


Рис. 4: Построчная ошибка аппроксимации прямых, исходящих из одной точки. По горизонтальной оси отложен номер пикселя вдоль прямой, по вертикальной оси *shift*. Левый верхний рисунок, для  $p = 2$ , правый верхний -  $p = 4$ , левый нижний -  $p = 6$ , правый нижний  $p = 8$ .

относительно поворота, что намекает на своего рода равнозначность наклона и продольного сдвига в процессе формирования прямой. Подробнее об этом написано в следующей главе.

На рисунке 5 представлена иная визуализация ошибки аппроксимации, по горизонтальной оси отложен сдвиг вдоль прямой в пикселях (значение ординаты пикселя, принадлежащего прямой, в случае преимущественно-вертикальных прямых), на вертикальной - значение наибольшей ошибки для этого сдвига. Из рисунка видно, что максимальная ошибка подчиняется рекурсивному закону.

Таким образом, эмпирическое исследование позволило обнаружить ряд закономерностей: ошибка аппроксимации растет пропорционально шестой части логарифма от размера изображения, существует симметрия между наклоном прямой и продольным сдвигом вдоль неё для четных степеней

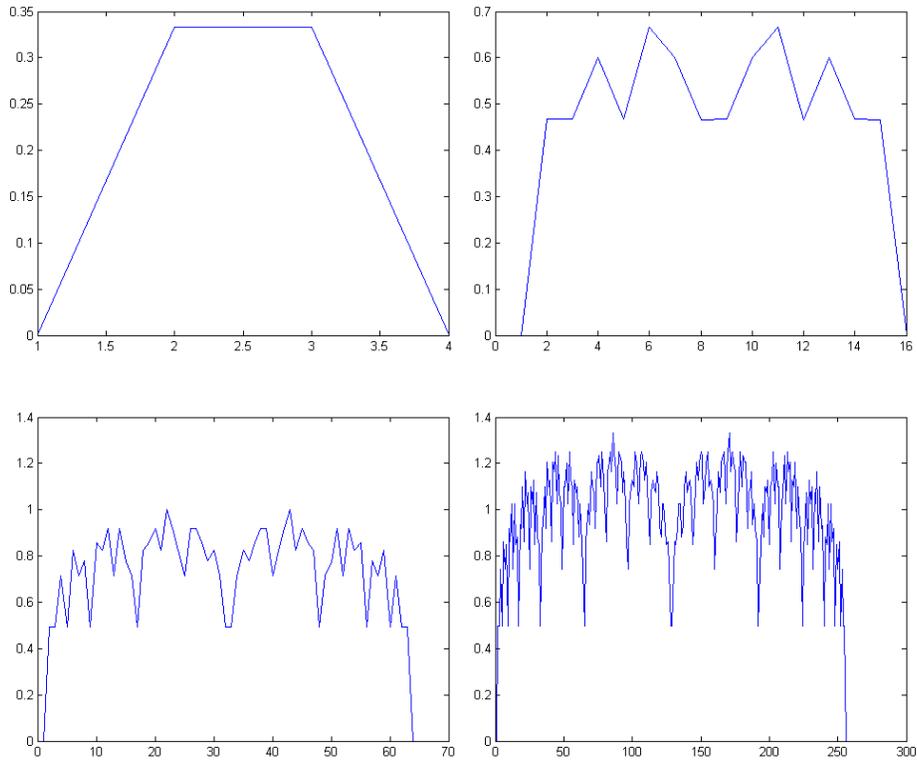


Рис. 5: Зависимость максимальной ошибки аппроксимации от значения наклона прямой. Левый верхний рисунок, для  $p = 2$ , правый верхний -  $p = 4$ , левый нижний -  $p = 6$ , правый нижний  $p = 8$ .

размера изображения. Далее предлагается теоретическое обоснования полученных результатов.

## 4 Теоретическое исследование

В данной главе предлагается аналитическое представление ошибки аппроксимации диадическими прямыми, приводится обоснование линейного роста ошибки с логарифмом размера изображения, показана связь между структурой наихудшей ошибки для изображения заданного размера и числами Якобшталя.

Пусть длина прямой  $n = 2^p$ . Максимальный подъем равен  $2^p - 1$ , что соответствует наклону  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Подъем - характеристика пикселя, принадлежащего прямой (для преимущественно-вертикальной прямой с наклоном вправо подъем равен его абсциссе).

Обозначим ближайшее целое к числу  $x \in \mathbb{R}$ :  $[x] = \lfloor x + 0.5 \rfloor$

Здесь и далее будем считать, что прямые исходят из начала координат, следовательно, подъем для идеальной прямой с наклоном  $t$  в точке  $x$  равен:

$$L(x, t) = \frac{xt}{2^p - 1} \quad (2)$$

или, с использованием двоичных представлений  $x = \sum x_s 2^s$  и  $t = \sum t_r 2^r$ :

$$L(x, t) = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^{r+s} x_s t_r}{2^p - 1}. \quad (3)$$

Для вычисления подъема диадической прямой необходимо заметить, что диадическая прямая представима в виде суммы базисных диадических прямых  $D_r(x) = D(x, 2^r)$  с подъемами  $1, 2, 4, \dots, 2^{p-1}$ . Для них можно выписать простую формулу:

$$D_r(x) = \left\lfloor \frac{2^r x}{2^p - 1} \right\rfloor \quad (4)$$

**Определение 1.** *Подъем диадической прямой с наклоном  $t$  в точке  $x$*

$$D(x, t) = \sum_{r=0}^{p-1} t_r D_r(x). \quad (5)$$

**Предложение 1.** *Это определение согласовано с рекурсивным определением паттерна диадической прямой.*

*Доказательство.* Этот факт легко проверяется для базисных прямых  $D_r(x)$ , после чего утверждение вытекает из линейности определения подъема. ■

Таким образом,

$$D(x, t) = \sum_{r=0}^{p-1} t_r \left\lfloor \frac{2^r x}{2^p - 1} \right\rfloor \quad (6)$$

или, с использованием двоичного представления  $x$ :

$$D(x, t) = \sum_{r=0}^{p-1} t_r \left[ \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^{r+s} x_s}{2^p - 1} \right]. \quad (7)$$

Т.к.  $t_r$  равно либо 0, либо 1, мы можем внести его под знак округления:

$$D(x, t) = \sum_{r=0}^{p-1} \left[ \sum_{s=0}^{p-1} \frac{2^{r+s} x_s t_r}{2^p - 1} \right]. \quad (8)$$

Данная формула является наглядной иллюстрацией равнозначного участия значения наклона и сдвига вдоль прямой в формировании подъема диагического паттерна, что объясняет симметричность полученных диаграмм ошибки (см. рисунок 4).

Получим верхнюю оценку роста ошибки аппроксимации.

**Предложение 2.** *Модуль максимальной ошибки аппроксимации растет с ростом степени  $p$  не быстрее, чем  $\frac{p}{2}$ .*

*Доказательство.* Запишем ошибку аппроксимации

$$E(x, t) = D(x, t) - L(x, t) = \sum_{r=0}^{p-1} t_r \left( \left[ \frac{x \cdot 2^r}{2^p - 1} \right] - \frac{x \cdot 2^r}{2^p - 1} \right) \quad (9)$$

Каждое из  $p$  слагаемых суммы не превышает по модулю  $\frac{1}{2}$ . ■

Как было показано эмпирически в предыдущем разделе, для четных  $p$  наибольшая ошибка аппроксимации достигается на прямых с наклонами  $\frac{2^p}{3}$  и  $\frac{2^{p+1}}{3}$  в пикселях с соответствующими координатами. Проанализируем структуру ошибки в этих точках на примере  $(\frac{2^p}{3}, \frac{2^p}{3})$  при  $p \rightarrow \infty$ :

$$E\left(\frac{2^p}{3}, \frac{2^p}{3}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} t_r \left( \left[ \frac{2^r}{3} \right] - \frac{2^r}{3} \right). \quad (10)$$

Интересно, что последовательность

$$a(n) = \left[ \frac{2^n}{3} \right] \quad (11)$$

является последовательностью Якобштала, которые описываются рекуррентной формулой:  $a(n) = a(n-1) + 2a(n-2)$ ,  $a(0) = 0$ ,  $a(1) = 1$ . Решение рекуррентного выражения для последовательности Якобштала имеет вид:

$$a(n) = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \quad (12)$$

**Предложение 3.** *Последовательности (11) и (12) эквивалентны.*

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $n = 2k$ , тогда разложение двойки примет вид  $2^n = 3A + 1$ , где  $A \in \mathbb{N}$ .

Подставим это выражение последовательно в (12):

$$\frac{3A + 1 - 1}{3} = A;$$

и (11):

$$\frac{2^n - 1}{3} = A,$$

что при округлении приводит к выражению:

$$\left[ \frac{2^n}{3} \right] = A.$$

Аналогично для  $n = 2k + 1$ . ■

Далнейший анализ подъема диадической прямой в точке  $(\frac{2^p}{3}, \frac{2^p}{3})$  показал, что значения битового представления наклона прямой является биточередующейся последовательностью 0,10101... Следовательно, в формировании ошибки для изображения заданного размера участвует лишь половина членов последовательности Якобшталя, которым соответствует  $t_r = 1$ . Подпоследовательности последовательности Якобшталя, состоят из элементов с индексами  $2r$  и  $2r + 1$  соответственно, могут быть представлены аналитически:  $\frac{4^r - 1}{3}, \frac{2^{2r+1} + 1}{3}$ . Тогда асимптотическая ошибка при  $p \rightarrow \infty$ :

$$E \left( \frac{2^p}{3}, \frac{2^p}{3} \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{4^r - 1}{3} - \frac{4^r}{3} \right) = - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3} \quad (13)$$

Откуда следует

**Предложение 4.** *Модуль максимальной ошибки аппроксимации растет с ростом степени  $p$  не медленнее, чем  $\frac{p}{6}$ .* ■

## 5 Заключение

В настоящей работе проведен теоретический и эмпирический анализ ошибки аппроксимации идеальных прямых диадическими паттернами. Предложен аналитический способ вычисления подъема диадической прямой. Приведены оценки аппроксимации роста ошибки в зависимости от роста размера изображения. Показана связь между структурой ошибки и числами Якобшталя, предположительно их новое представление. Авторы верят, что БПХ, как инструмент для решения практических задач по прежнему обладает большим нереализованным потенциалом. Прделаная работа мотивируется стремлением к совершенствованию быстрого преобразования Хафа и изучению его структуры.

## Литература

- [1] Paul V.C. Hough. and Ann Arbor. Method and means for recognizing complex patterns, 12 1962.
- [2] P. Hart. How the Hough transform was invented [DSP history]. *Signal Processing Magazine IEEE*, 26(6):18–22, 2009.
- [3] D. Nikolaev, S. Karpenko, I. Nikolaev, and P. Nikolayev. Hough transform: underestimated tool in the computer vision field. *Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation*, pages 238–246, 2008.
- [4] A. Goldenshluger and A. Zeevi. The hough transform estimator. *The Annals of Statistics*, 32:1908–1932, 2004.
- [5] P. Ballester. Hough transform for robust regression and automated detection. *Astronomy and Astrophysics*, 286:1011–1018, 1994.
- [6] Безматерных П. Ханипов Т.М. Николаев Д.П. Решение задачи линейной регрессии с помощью быстрого преобразования Хафа. *Материалы 35-й конференции молодых ученых и специалистов “Информационные технологии и системы (ИТус’12)”, стр. 354-359*, 2012.
- [7] M. Brady. A fast discrete approximation algorithm for the Radon transform. *SIAM J. Computing*, 27(1), 1998.
- [8] Николаев Д.П. Николаев П.П. Посников В. В. Карпенко С. М. Быстрое преобразование Хафа с управляемой робастностью. *Искусственные интеллектуальные системы и Интеллектуальные САПР. Труды международной конференции IEEE AIS’04 и CAD-2004. М.: Изд-во Физматлит, т. 2, стр. 303-309*, 2004.
- [9] M. Frederick, N. VanderHorn, and A. Somani. Real-time H/W implementation of the approximate discrete radon transform. *IEEE International Conference on Application-Specific Systems, Architecture Processors (ASAP’05)*, 2:399–404, 2005.