Нелинейный Алгебраический Метод Компьютерной Томографии при Немонохроматическом Источнике

Виктор Прун[1], Дмитрий Николаев[2], Марина Чукалина[3,4], Анастасия Ингачева[4], Алексей Бузмаков[4]

[1]МФТИ (ГУ), Долгопрудный, Россия
[2]ИППИ РАН, Москва, Россия
[3]ИПТМ РАН, Черноголовка, Россия
[4]ИК РАН, Москва Россия
{vicproon, d.p.nikolaev, chukalinamarina, ingacheva, buzmakov}@gmail.com

Abstract. Рассматривается задача реконструкции для метода компьютерной томографии в условиях использования немонохроматического излучения для зондирования. Показано наличие характерных артефактов, возникающих при использовании алгоритмов, созданных для случаев монохроматического зондирования, для восстановления изображений из полихроматичных синограмм. Предлагается модификация алгебраического метода реконструкции для полихроматического случая. Вместо типично используемых методов пост-обработки для борьбы с артефактами, предлагается внести изменения в постановку задачи. Задача восстановления от вычисления функции ослабления рентгеновского излучения сводится к вычислению концентраций заранее ограниченного набора элементов, входящих в состав исследуемого объекта. Для восстановления концентраций предлагается использовать алгебраический метод. Выведен шаг итерации для такой задачи.

Keywords: Компьютерная томография, немонохроматический источник, алгебраический метод, обработка изображений

1 Введение

Компьютерная томография – это важный инструмент для исследования внутренней структуры объектов. Он находит себе применения в лабораторных исследованиях, промышленности и медицине. Томографическое измерение состоит в измерении затухания рентгеновского излучения, прошедшего через объект, при разных углах поворота объекта. Результаты измерений восстанавливаются специальными алгоритмами реконструкции, при этом получаются пространственные распределения линейного коэффициента поглощения, по которому зачастую можно судить о внутренней структуре объекта. Чем большее количество проекционных углов включено в синограмму (полный набор проекций), тем точнее получается восстановленная характеристика.

Однако реальные эксперименты всегда содержат шум, а так же реальное затухание рентгеновского излучения не всегда соответствует используемой при восстановлении модели, поэтому на восстановленных картинах возможно проявление артефактов – ошибочных экстремумов в распределении коэффициента поглощения. В некоторых ситуациях (если уровень шума не превышает некоторого порога) эти артефакты устранимы с помощью регуляризации – поправок для лучшего соответствия данных идеальной модели. В некоторых же случаях наличие артефактов может повлечь ошибочные выводы о структуре исследуемого объекта [1]. Существует некоторая классификация артефактов, основанная на описании источников их возникновения [2].

Цель данной работы – борьба с одним из таких артефактов (Beam Hardening Artifact [3]), вызванным несоответствием излучения реального источника описанию (монохроматическому), используемому в моделях для процедуры восстановления. В работе восстановление производится в 2D-сечении и задача рассматривается в параллельном пучке.

В главе 2 будет представлена модель прямой проекции а так же алгебраический метод для монохроматического источника излучения. Затем, в главе 3 будет поставлена задача восстановления в монохроматическом пучке. Наконец, в главе 4 будут приведена соответствующая модификация алгебраического метода для решения соответствующей задачи.

2 Томография при Монохроматическом Излучении

В текущей главе мы представляем алгебраический метод для случая монохроматического излучения. Пусть $f(x,y)$ – восстанавливаемое распределение линейного коэффициента ослабления объекта. Пусть на объект падает параллельный пучок лучей интенсивностью I_0 под углом φ. Тогда интенсивность излучения вдоль некоторого бесконечно тонкого луча со сдвигом s, $l(\varphi,s)$ после прохождения через объект будет

$$I(l(\varphi,s)) = I_0 \exp(-\int f(x,y)dl). \tag{1}$$

Для краткости записи далее аргументы угла и сдвига, задающие прямую $l(\varphi,s)$ будут опускаться. Данные значения подвергаются нормировке и логарифмированию, в результате восстанавливается распределение линейного коэффициента ослабления для энергии зондирующего излучения, путем решения системы уравнений:

$$\ln(I_0/I(l)) = p(l) = \int f(x,y)dl$$

для всех углов измерения φ и сдвигов s. Оператор интегрирования вдоль всех возможных направлений называется преобразованием Радона. При восстановлении реальных измерений как входные данные $p(\varphi, s)$, так и искомая характеристика $f(x, y)$ представляются дискретными изображениями размеров $N \times M_\varphi$ и $N \times N$, соответственно, а преобразование Радона заменяется на преобразование Хафа.

Для восстановления распределения линейного коэффициента ослабления используются в основном интегральные или алгебраические методы [4]. Особый интерес представляют последние, так как их, как будет показано ниже, можно использовать и для восстановления экспериментов, проводимых с использованием немонохроматического пучка. Пусть $f \in R^{N\times N}$ и $p \in R^{N\times M_\varphi}$ – соответственно входные и выходные данные, H – матрица линейного преобразования Хафа размера $N^3 M_\varphi \approx N^4$. Тогда томографическую проекцию можно записать в виде СЛАУ

$$p = Hf.$$

Решение этой СЛАУ методом наименьших квадратов в явном виде невозможно ввиду огромного размера матрицы H, однако ее умножение на вектор f, как и умножение транспонированной матрицы H^T может быть посчитано быстро за $O(N^2 \log N)$ используя методы обработки изображений [5]. Применяя метод градиентного спуска для минимизации L2 нормы расхождения, получаем шаг градиентного спуска

$$f^\xi = f^{\xi-1} + \alpha H^T\left(Hf^{\xi-1} - p\right), \text{ где}$$

α - параметр релаксации.

3 Прямая Проекция при Немонохроматическом Источнике

В реальности спектр используемого для зондирования излучения не сингулярный, а коэффициент ослабления объекта меняется в зависимости от длины волны ($I_0 = I_0(\lambda)$, $f(x, y) = f(x, y, \lambda)$). Таким образом, при переходе в немонохроматический случай, уравнение (1) принимает следующий вид:

$$I(l) = \int_0^{+\infty} I_0(\lambda) \exp(-\int f(x, y, \lambda) dl)\, d\lambda \ . \tag{2}$$

Таким образом, оператор проецирования становится нелинейным. При этом, в случае когда источник все же монохроматический, то есть $I_0(\lambda) = \delta(\lambda)$, легко видеть, что уравнение (2) переходит обратно в (1). Спектр используемого в экспериментах источника излучения мы считаем известным.

Переход к нелинейной задаче не был бы столь существенным, если бы при этом не терялась возможность восстановить зависимость подынтегральной функции от переменной интегрирования. Иными словами, без дополнительных знаний о структуре объекта, восстановить искомую функцию $f(x, y, \lambda)$ невозможно.

Предлагается использовать следующую модель формирования функции f [7]. Будем считать, что исследуемый объект состоит из смеси K известных элементов, для которых известны их спектральные функции поглощения $f_k(\lambda)$. Данные функции являются известными величинами, которые можно измерить в лабораторных условиях. При этом неизвестными будут пространственные распределения концентрации $c_k(x,y)$ каждого элемента.

$$f(x,y,\lambda) = \sum_{k=1}^{K} c_k(x,y) * f_k(\lambda). \quad (3)$$

Учитывая то, что интеграл внутри экспоненцирования – линейный оператор H, получим общее значение ослабления интенсивности входного излучения для смеси $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_K)^T$:

$$I(\boldsymbol{c}) = \int_0^{+\infty} I_0(\lambda) exp(-\sum_{k=0}^{K} f_k(\lambda) H c_k) d\lambda.$$

Далее будет предложен итерационный процесс восстановления концентраций c_k, основанный на алгебраическом методе и минимизации L2-нормы.

4 Алгебраический Метод для Немонохроматического Случая

В финале раздела будет выведена формула для расчета поправки на каждом шаге итерации метода восстановления концентраций c_k.
Пусть далее i индексирует пиксели в пространстве исходных изображений-концентраций размера $N \times N$, j индексирует пиксели в пространстве входных изображений-измерений размера $N \times M_\varphi$, а k, как и раньше, принимает значения $1..K$ и индексирует различные элементы, составляющие исследуемый объект. Пусть h_ij – элементы матрицы H. Введем невязку -

$$Q(\boldsymbol{c}) = (I(\boldsymbol{c}) - t)^2,$$

где $t \in R^{N \times M_\varphi}$ – значения, зарегистрированные детектором. Для того, чтобы выстроить итерационный процесс вычисления концентраций, необходимо подсчитать градиент невязки. Сделаем это покомпонентно:

$$\frac{\partial Q_j}{\partial c_k^i} = 2(I(\boldsymbol{c}) - t)_j \frac{\partial I(c)_j}{\partial c_k^i}. \quad (4)$$

Рассчитаем возникшую частную производную:

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{c})_j}{\partial c_k^i} = \int_0^{+\infty} d\lambda \left\{ \frac{\partial}{\partial c_k^i} \exp\left(-\sum_s f_s(\lambda)[Hc_s]_j\right) \right\} =$$
$$\int_0^{+\infty} d\lambda \left\{ exp\left(-\sum_s f_s(\lambda)\,[Hc_s]_j\,\right) \frac{\partial}{\partial c_k^i}\left(-f_k(\lambda)[Hc_k]_j\right) \right\} =$$
$$\int_0^{+\infty} d\lambda \left\{ -f_k(\lambda) \exp\left(-\sum_s f_s(\lambda)\,[Hc_s]_j\right) \frac{\partial [Hc_k]_j}{\partial c_k^i} \right\},$$

То есть имеем

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{c})_j}{\partial c_k^i} = \mu_j^k h_{ji}, \text{где } \mu_j^k = \int_0^{+\infty} \{-f_k(\lambda) \exp\left(-\sum_s f_s(\lambda) \, [Hc_s]_j\right)\} d\lambda. \quad (5)$$

В уравнении (5) введено новое обозначение, некоторый весовой коэффициент, одинаковый для всех пикселей входных данных. Подставляя (5) в (4) получим выражение для градиента общей невязки решаемой минимизационной задачи:

$$\nabla_k Q = 2H^T R^k, \text{где } R_j^k = (I(c) - t)_j \mu_j^k, \quad (6)$$

Где за R^k обозначена взвешенная невязка для элемента k. Таким образом, мы вычислили компоненты градиента по каждому из составляющих исходный объект элементу. Как видно из формулы (6), компоненты градиентов по различным элементам могут вычисляться отдельно. Тем не менее, не стоит забывать, что все элементы связаны через взвешенные невязки R^k, в которых содержится зависимость от всего вектора $\boldsymbol{c}$. Итак, наконец, шаг итерации алгоритма выглядит следующим образом:

$$\mathrm{c}_\mathrm{k}^\xi = c_k^{\xi-1} - \alpha_k(\xi - 1) H^T R^k(\boldsymbol{c}^{\xi-1}) \,. \quad (7)$$

5 Заключение

Была рассмотрена задача компьютерной томографии для восстановления измерений, полученных при использовании немонохроматического источника излучения. При этом привлекаются дополнительные знания относительно структуры элементов, из которых состоит объект. Был явно выписан шаг итерации алгебраического метода, восстанавливающего распределения концентраций составляющих объект элементов.

Для внесения ясности приведем псевдокод алгоритма восстановления:

```
Вход: f_k(λ), I_0(λ), t = I(φ, s)
Выход: c_k(x, y)
Инициализация c
Q <- (I(c) − t)^2
Пока Q > eps:
   Вычисление весовых коэффициентов μ_j^k по (5).
   Вычисление взвешенных невязок R^k по (6)
   Обновление c_k^ξ по (7)
   Q <- (I(c) − t)^2
```

В дальнейшем мы планируем произвести оптимальную численную реализацию алгоритма и проведение тестов как на модельных, так и на реальных данных, регистрируемых на лабораторном микротомографе, разработанном и функционирующем в ИК РАН [6].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-07-00970-а, 13-07-12179-офи_м) и Минобрнауки (проект RFMEFI61614X0005).

Список литературы

1. Bamberg, F., Dierks, A., Nikolaou, K., Reiser, M.F., Becker, C.R., Johnson, T.R.:Metal artifact reduction by dual energy computed tomography using mo-noenergetic extrapolation. Eur. Radiol. 21(7), 1424-1429 (2011)
2. Barrett, J.F., Keat, N.: Artifacts in CT: Recognition and Avoidance. Radio Graphics. 24, 1679–1691 (2004)
3. Van de Casteele, E., Van Dyck, D., Sijbers, J., Raman, E.: An energy-based beam hardening model in tomography. Physics in Medicine and Biology 47(23), 4181–4190 (2002)
4. Kak, A.C., Slaney M., Principles of Computerized Tomographic imaging. N.Y.: IEEE Press, 1988.
5. Prun, V.E., Buzmakov, A.V., Nikolaev, D.P., Chukalina, M.V., Asadchikov, V.E.: A computationally efficient version of the algebraic method for computer tomography. Automation and Remote Control 74(10), 1670–1678 (2013)
6. Асадчиков, В.Е., Бузмаков, А.В., Золотов, Д.А., Сенин, Р.А., Геранин, А.С.: Лабораторные рентгеновские микротомографы на монохроматическом излучении. Кристаллография 55(1), 167–176 (2010)
7. Gullikson, E.M.: Mass absorption coefficients. X-ray data booklet. Lawrence Berkeley National Laboratory (2001)